

ФРАКТАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ФИЗИКА СОЛНЦА

Макаренко Н.Г.¹, Князева И.С.^{1,2}

¹ ГАО РАН, г. Санкт-Петербург, Россия, ng-makar@mail.ru

² Институт Мозга Человека им. Н.П. Бехтеревой РАН, г. Санкт-Петербург, Россия

...ничто так не ускользает от изображения в слове и в то же время ничто так настоятельно не требует передачи на суд людей, как некоторые вещи, существование которых недоказуемо, да и маловероятно... (Альберт П, тракт. о кристалл. дух. кн. 1.)

Известно, что аттракторы в хаотической динамике являются предельными образами фазовых траекторий нелинейных уравнений. Их фазовый поток сжимается в устойчивых направлениях и расширяется в неустойчивых. Если сжатие преобладает, в фазовой геометрии системы возникает «странный» аттрактор: низкоразмерное притягивающее множество, инвариантное относительно динамики. Линейным аналогом этой картины является предельный образ («неподвижная точка») последовательных сжатий компактного множества, системой итерирующих функций (СИФ) в пространстве, наделенном подходящей метрикой. Согласно теореме Банаха о неподвижной точке, такой предел является единственным и называется аттрактором СИФ, или *фракталом*. Этот подход к фрактальной геометрии, предложенный М. Барнсли и Дж. Хатчинсоном [1] демонстрирует фрактал как привычный образ математического анализа без элементов хирургии.

Если наделить СИФ вероятностями, то мы получим фрактал с самоподобной (мультифрактальной) раскраской (мерой). Ее можно считать «краской», нанесенной последовательными сжатиями на носитель, который может и не быть фракталом. Важно, что такие СИФ, наделенные вероятностями (их называют марковскими операторами), приведут к *единственной* мультифрактальной текстуре. Она гарантируется упомянутой теоремой Банаха в пространстве мер и свойством сжатия Марковского оператора в метрике Монжа-Канторовича. Текстура мультифрактала полностью определяется набором вероятностей СИФ [2,3]. Для описания регулярности меры используют так называемый $f(\alpha)$ спектр ее Гельдеровских показателей. Однако, вариабельность HR (*High Resolution*) изображений не позволяет вычислить такой спектр непосредственно. В лекции показано, как можно получить такой спектр заменой фотометрической меры *миопическими* емкостями Шоке [4]. Аналогом этих понятий служат нарушения зрения, позволяющие выделять текстуры ограниченной «серости». Емкости не аддитивны, но обладают свойством монотонности, важным для вычисления скейлинговых экспонент. В лекции приводятся примеры использования этой техники для получения $f(\alpha)$ спектра для магнитограмм Солнца и сравнительного описания гельдеровской структуры пятен в фотосфере и магнитных полях. Как следствие, обсуждаются понятие «площади» магнитограммы и подходы к оценкам интегралов магнитной индукции по компонентам мультифрактального разложения.

1. Barnsley M.F. Fractals everywhere. New-York: Academic Press, 1988.
2. Макаренко Н.Г. Фракталы, аттракторы, нейронные сети и все такое (2002). <https://neurolectures.narod.ru/2002/Makarenko-2002.pdf>; Геометрия изображений. (2009). <https://neurolectures.narod.ru/2009/Makarenko-2009.pdf>
3. Князева И.С., Макаренко Н.Г. Мультифрактальный анализ изображений // ПНД. Изв. вузов. 2009. Т. 4. С. 85-99.
4. Makarenko N. G. et al. Multifractal analysis based on the Choquet capacity: Application to solar magnetograms // Physica A. 2012. V. 391. №. 18. P. 4290-4301.